物理光学

哈尔滨工程大学

光电科学与工程专业学位课

第二章　波的基本性质

- §2-0 电磁场的基本方程
- §2-1 定态光波的复振幅描述
- §2-2 波前函数
- §2-3 平面波与球面波

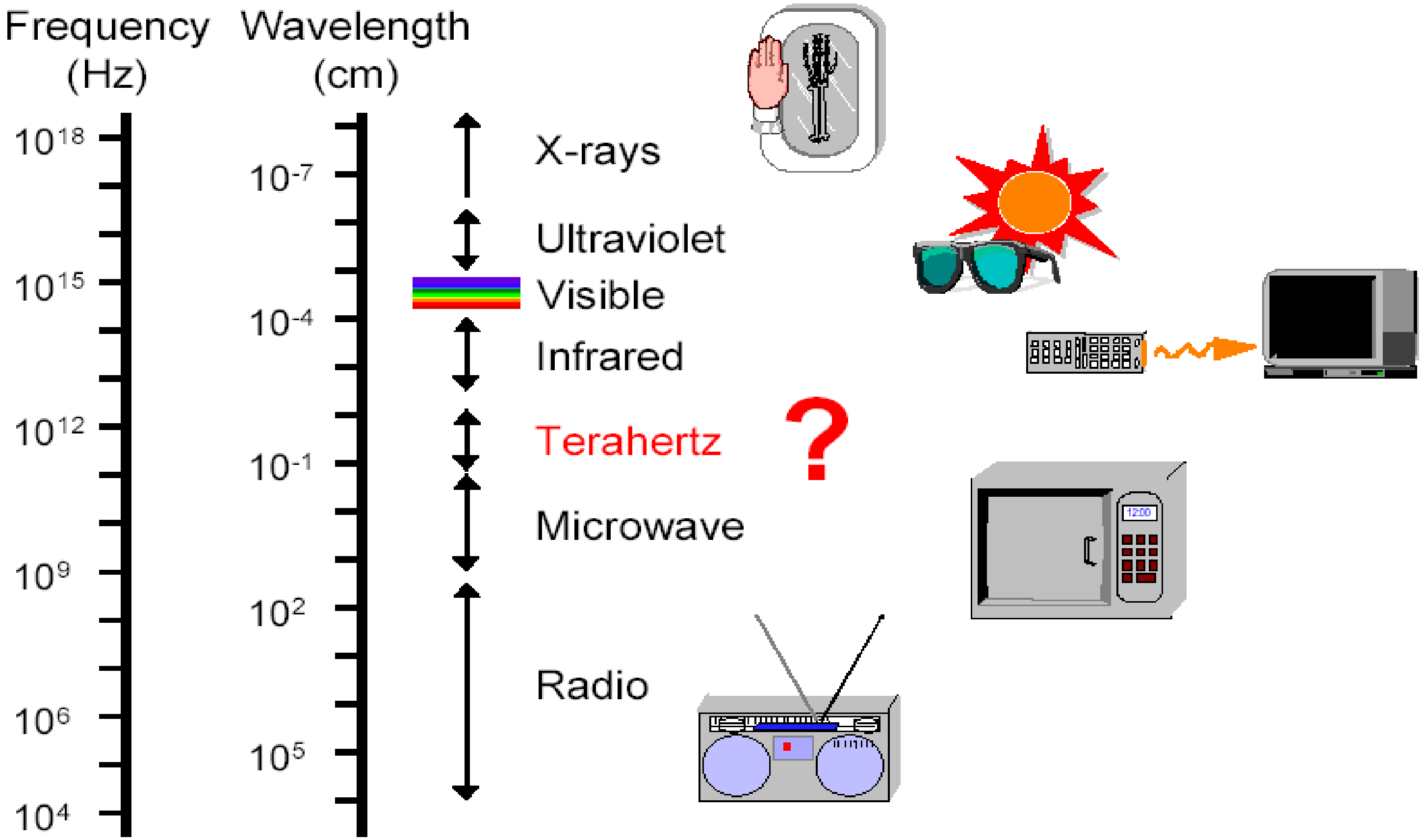
§ 2-0电磁场的基本方程

麦克斯韦
(1831-1879)

麦克斯韦是继法拉第之后，集电磁学大成的伟大科学家。他依据库仑、高斯、欧姆、安培、毕奥、萨伐尔、法拉第等前人的一系列发现和实验成果，建立了第一个完整的电磁理论体系，不仅科学地预言了电磁波的存在，而且揭示了光、电、磁现象的本质的统一性，完成了物理学的又一次大综合。这一理论自然科学的成果，奠定了现代的电力工业、电子工业和无线电工业的基础。

麦克斯韦1831年6月出生于英国爱丁堡，他的父亲原是律师，但他的主要兴趣是在制作各种机械和研究科学问题，他这种对科学的强烈爱好，对麦克斯韦一生有深刻的影响。麦克斯韦10岁进入爱丁堡中学， 14岁在中学时期就发表了第一篇科学论文《论卵形曲线的机械画法》，反映了他在几何和代数方面的丰富知识。16岁进入爱丁堡大学学习物理，三年后，他转学到剑桥大学三一学院。在剑桥学习时，打下了扎实的数学基础，为他尔后把数学分析和实验研究紧密结合创造了条件。他阅读了W.汤姆生的科学著作，他十分赞同法拉第提出的新观点，并且精心研究法拉第的《电学的实验研究》一书。

*光波是特定波段的电磁波



可见光波长约为380---760nm，光频为8×10^{14}--- 4×10^{14}Hz

§ 2-0电磁场的基本方程

Question!!

1、麦克斯韦方程组（微分、积分形式）；

2、物质方程；

3、无源真空中的波动方程；

1、麦克斯韦方程组（微分、积分形式）

经典光学的主干-麦克斯韦方程组

大多数与光的传播有关的现象都可以从这一理论出发得到解释。光作为电磁波，光的干涉、衍射、光的调制、偏振光的干涉等空域和频域的线性叠加，均出自麦克斯韦方程组的线性性质。

1、麦克斯韦方程组（微分、积分形式）

$$
\begin{cases}
\oint_{C} \vec{E}\cdot \mathrm{dl} = -\iint_{\Sigma} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{ds} \\
\oint_{C} \vec{H}\cdot \mathrm{dl} = \iint_{\Sigma} \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)\cdot \mathrm{ds} \\
\oiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot \mathrm{ds} = \iiint_{\Omega} \rho\, \mathrm{dv} \\
\oiint_{\Sigma} \vec{B}\cdot \mathrm{ds} = 0
\end{cases}
$$

积分形式

1、麦克斯韦方程组（微分、积分形式）

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{（1）涡旋场} \\
\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{（2）涡旋场} \\
\nabla \cdot \vec{D} = \rho & \text{（3）有源场} \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{（4）无源场}
\end{cases}
$$

微分形式

1、麦克斯韦方程组（微分、积分形式）

麦克斯韦方程得出的结论：

（1）任何随时间变化的磁场周围空间都会产生变化的电场，这种电场具有涡旋的性质;

（2）任何随时间变化的电场（位移电流）都会在周围空间产生变化的磁场，磁场也是涡旋场。

由此可见：变化的电场与变化的磁场紧密相连，其中一个起变化，随即出现另一个，相互激励形成统一的电磁场。

变化的电磁场可以以一定的速度向周围空间传播出去。设在空间某一区域内电场有变化，那么就在临近的区域内引起变化的磁场，这种变化的磁场又在较远的区域引起变化的电场，这样电场与磁场交替产生，便使之传播到更远的区域；这种电磁场在空间以一定的速度由近及远的传播就是电磁波。

2、物质方程：

物质方程

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

ε 为介质中的介电常数，μ 为磁导率，σ 为电导率

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_\gamma$ ε_0 为真空中的介电常数，ε_γ 为相对介电常数

$\mu = \mu_0 \mu_r$ μ_0 为真空中的磁导率，μ_r 为相对磁导率，

对于非铁磁介质 $\mu \approx \mu_0$ 或者 $\mu_r \approx 1$

(1) 光扰动是电磁扰动，光扰动随时空变化的规律，遵从麦克斯韦电磁场方程组。

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\mu_r\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\varepsilon_r\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

自由空间的麦克斯韦方程，ε为介质的相对介电常数，μ为相对磁导率，*E*为电场强度矢量，*H*为磁场强度矢量。

$$\nabla\cdot\vec{A}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}\bullet\left\{A_x,A_y,A_z\right\}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)$$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)j+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)k$$

3、无源真空中的波动方程；

1. 电磁场的波动方程（麦克斯韦方程在真空的波动形式）

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0,\quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

在没有自由电荷、传导电流分布的空间（称为自由空间）或线性介质中 $\rho_0=J_0=0$，只存在电场和磁场的相互激发，电磁场运动规律就用下面的麦克斯韦方程形式描述：

$$\nabla\cdot\vec{D}=0,\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\quad \nabla\cdot\vec{B}=0,\ \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=0,\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\ \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

真空中

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\underline{\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)}=\nabla\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})$$

$$=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{H}=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\underline{-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}\qquad(1)$$

$$\underline{\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=\nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{D}/\varepsilon_0\right)}_{=0}-\nabla^2\vec{E}$$

$$=\underline{-\nabla^2\vec{E}}\qquad(2)$$

$$(2)=(1)\Rightarrow\nabla^2\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\Rightarrow\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

同理

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow\underline{\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)}=\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{D})$$

$$=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{E}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\underline{-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}}\qquad(1)$$

$$\underline{\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{H}\right)-\nabla^2\vec{H}=\nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{B}/\mu_0\right)}_{=0}-\nabla^2\vec{H}$$

$$=\underline{-\nabla^2\vec{H}}\qquad(2)$$

$$(2)=(1)\Rightarrow\nabla^2\vec{H}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\Rightarrow\nabla^2\vec{H}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

$$or\quad\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

(2) 在介质中的波动方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_r\varepsilon_0\mu\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\vec{H}-\varepsilon_r\varepsilon_0\mu\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}$$

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

上式是标准的波动方程，表明了自由空间交变的电场和磁场的运动和变化具有波动形式，形成电磁波，其传播速度为：

$$\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0=\frac{1}{v}\rightarrow v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}}$$

真空中电磁波的速度： $c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

$\varepsilon_0\approx 8.85\times10^{-12}F/m$， $\mu_0=4\pi\times10^{-7}H/m$， 得到真空电磁波速度为：

$c\approx3\times10^8 m/s$,和光速相同，再次证明光波就是电磁波。

根据折射率的定义：

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

迄今关于折射率的深层微观机理和性质的研究均从上式从发。比如2003年美国《科学》十大新闻：多个研究小组证实，特定介质能使光和其他电磁波以负折射率偏转。这种所谓“左手”性物质有可能用于制造性能更好的透镜。

美国ＵＣＳＤ的ＮＩＭ研究小组已经设计制成了具有负折射率的材料。这种材料是由铜质方形裂环振荡器和一条细铜线嵌在玻璃纤维的底板上形成的。铜质方形裂环振荡器（split ring resonator）和铜线分别嵌在底板的两面。（如图所示）。将用这样的材料制成的棱镜与用聚四氟乙烯（Teflon）制成的棱镜对比后发现，经两者折射的波偏离主轴的方向相反。由此证明了这种材料具有负折射率的性质。

（3）平面电磁波是自由空间电磁波的一基元成分。平面电磁波函数：

$$\vec{E}(r,t)=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_E)$$
$$\vec{H}(r,t)=\vec{H}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_H)$$

满足波动方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\varepsilon\varepsilon_0\mu_r\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\[2ex]\nabla^2\vec{H}-\varepsilon\varepsilon_0\mu_r\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}$$

k称为波矢，其方向与等相面的正交，即为波面的法线方向，其大小为：

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

（4）光波是横波。

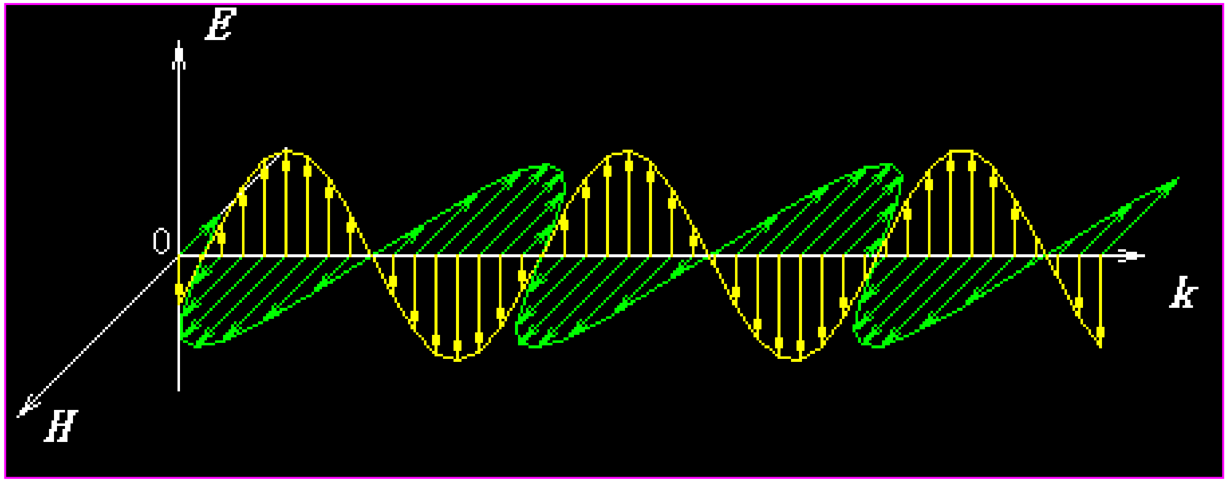
将平面电磁波函数代入$\nabla\cdot \boldsymbol{E}=0$和$\nabla\cdot \boldsymbol{H}=0$，得到$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{H}\perp\boldsymbol{k}$，即电磁场振荡方向与波矢方向正交，在与波矢正交的横平面中振荡，即自由空间中光波为横波。

（5）电场和磁场之间正交和同步。

将平面波函数代入：$\nabla\times\vec{E}=-\mu_r\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$

得：
$$\mu_r\mu_0\vec{H}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$$

可知：$\vec{H}\perp\vec{E}$，　$\phi_H=\phi_E$，　$\sqrt{\mu_r\mu_0}H_0=\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0}E_0$



§2-1定态光波与复振幅描述

定态光波场：

1、空间各点的扰动是同频率的简谐振荡（频率与振源相同）；

2、波场中各点扰动的振幅不随时间变化，在空间形成稳定的振幅分布。

§2-1 定态光波的复振幅描述

1.定态波

波动—— 物理量扰动在空间的传播。

扰动—— 物理量的取值在某特定值的邻域内的变化。

不同的物理量对应不同的波

—— 如声波、水面波、光波

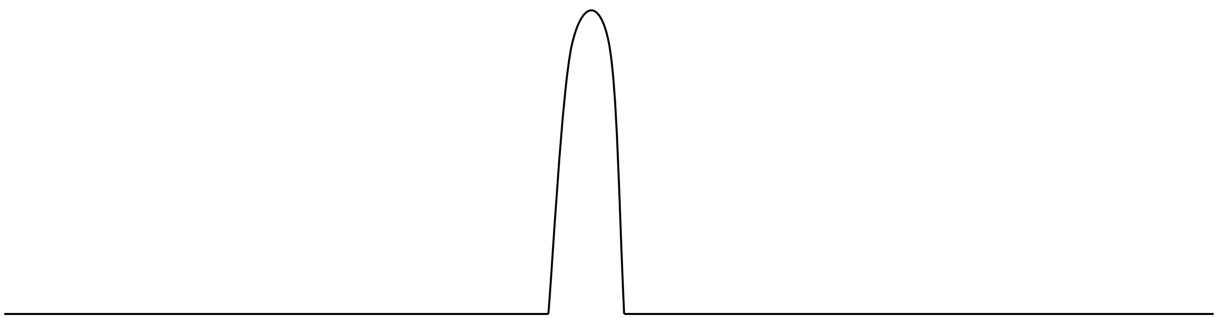
相应的物理量为标量—— 标量波，如水面波；

相应的物理量为矢量—— 矢量波，如电磁波；

相应的物理量为张量—— 张量波，如引力波。

波是物理量的一种时空分布，如果在空间任何一点，物理量都以同样的频率随时间作简谐变化，相应的波称为定态波。

定态波



冲击波

标量定态波可用余弦函数描述：

$$U(P,t) = A(P)\cos(\omega t - \phi_0(P))$$

P 某一场点。$-\phi_0$(P) 为 P 点的初相位。

特点：振幅稳定，A(P) 与 t 无关；

频率单一，由扰动源确定。

光波 (电磁波) 是矢量波，一般用电场矢量 $\boldsymbol{E}(P,t)$ 描述光波，并称其为光矢量。如果在光波的传播过程中光矢量的方向没有发生显著变化，则可以用标量波描述光的传播。

2. 定态波的复振幅描述

简谐量可通过复数表示:

$$U(P,t) = A(P)\cos(\omega t - \phi_0(P))$$

$$\updownarrow$$

$$\tilde{U}(P,t) = A(P)e^{-i(\omega t - \phi_0(P))}$$

采用复数表示，波函数为空间变化部分和时间变化部分之乘积。对于定态波，时间变化部分处处相同，为一公因子。

$$\tilde{U}(P,t) = A(P)e^{i\phi_0(P)}e^{-i\omega t} = \tilde{U}(P)e^{-i\omega t}$$

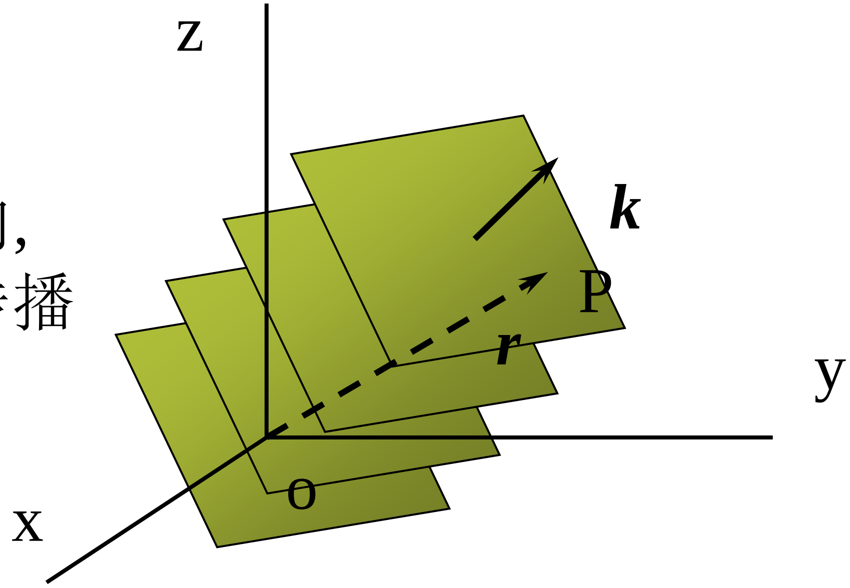
其中

$$\tilde{U}(P) = A(P)e^{i\phi_0(P)}$$

为复振幅。(其表现为简谐扰动的振幅)

平面简谐波的复振幅:

$$\tilde{U}(P) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{i\phi_0} \quad \leftrightarrow \quad A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi_0)$$



等相面 (波 面) 为平面。

k： 波矢, 沿等相面法线方向,
在各向同性介质中与光能传播方向一致。

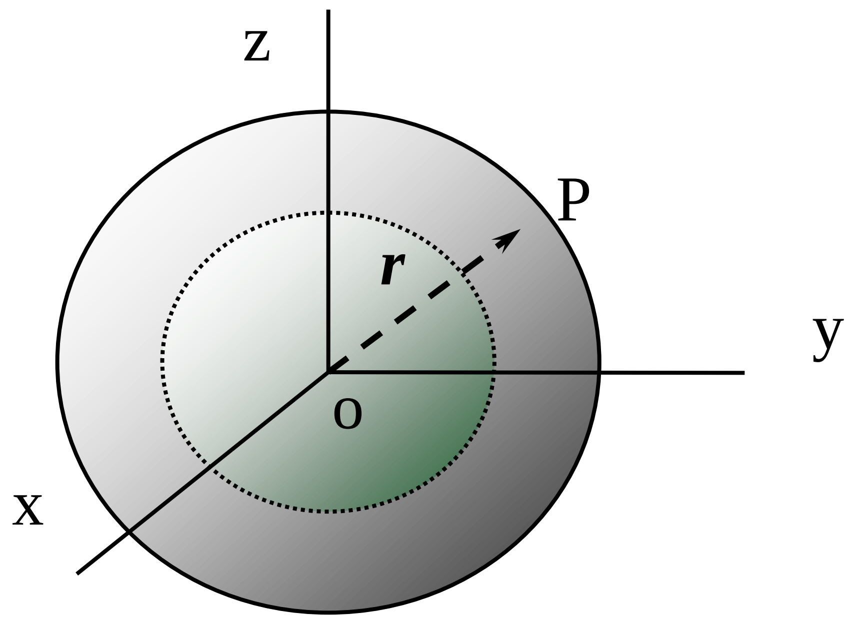
$k=2\pi/\lambda$

λ 为波长。

球面简谐波的复振幅:

$$\tilde{U}(\vec{r}) = \frac{a_1}{r} e^{ikr} e^{i\phi_0} \quad \leftrightarrow \quad \frac{a_1}{r}\cos(\omega t - kr - \phi_0)$$

等相面为球面。



相因子特点:

平面简谐波: 线性相因子

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}$$

球面简谐波: 非线性相因子

$$e^{ikr}=e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

或 (中心在(x_0,y_0,z_0) 处)

$$e^{ikr'}=e^{ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

3. 复振幅与光强

光强 I 是光通量密度的平均值：

$$I = \left\langle \left| \vec{S}(t) \right| \right\rangle_T = \left\langle \left| \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \right| \right\rangle_T$$

$$\propto \left\langle \left| \sqrt{\varepsilon_r}\, \vec{E}(t) \right|^2 \right\rangle_T = \frac{1}{2} n A^2$$

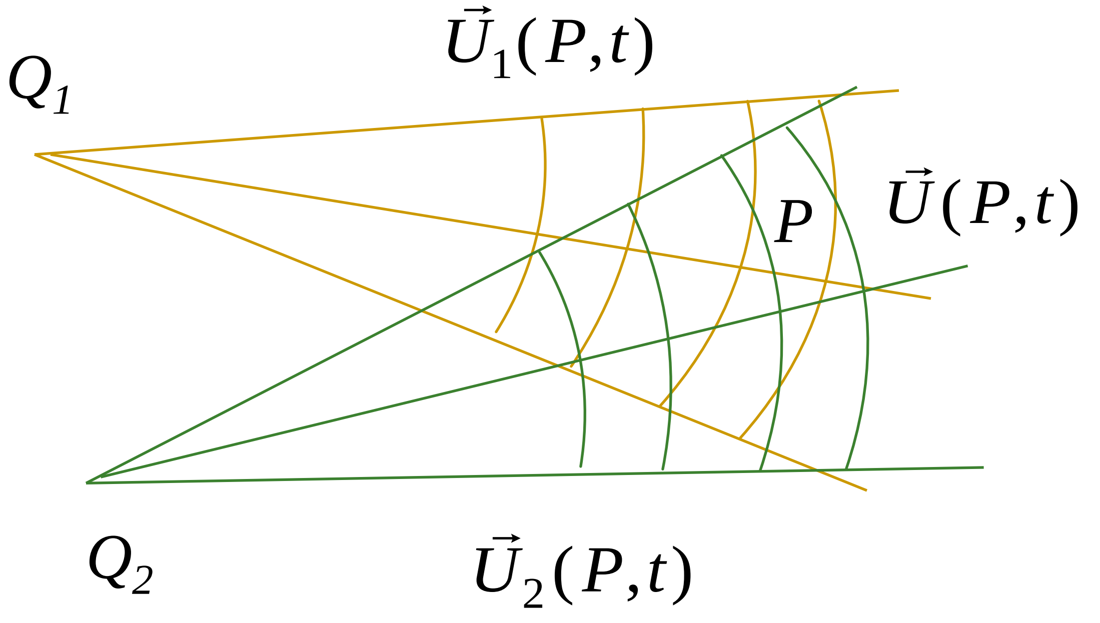
在同一介质中 $n/2$ 为常数，所以 $I \propto A^2$

一般我们之关心光强的相对分布，所以取

$$I = A^2 = |U|^2 = \tilde{U}\tilde{U}^*$$

如果存在多种不同折射率的介质，则应加上折射率因子。

4. 光波的迭加



考虑两个点光源 Q1、Q2。Q1、Q2 发出的光在场点 P 发生迭加。当 Q1、Q2 单独存在时场点 P 的光扰动分别为 $\vec{U}_1(P,t)$ 和 $\vec{U}_2(P,t)$。设当 Q1、Q2 同时存在时场点 P 的光扰动 (复振幅) 为 $\vec{U}(P,t)$，那么 $\vec{U}(P,t)$ 与 $\vec{U}_1(P,t)$ 和 $\vec{U}_2(P,t)$ 之间存在两种可能的关系：

$$\vec{U}(P,t)\begin{cases} =\vec{U}_1(P,t)+\vec{U}_2(P,t) \\ \neq \vec{U}_1(P,t)+\vec{U}_2(P,t) \end{cases}$$

在线性介质中等式成立，即迭加原理成立。在非线性介质中等式不成立，即迭加原理不成立。

光波满足 Maxwell 方程组。在线性介质中介电常数与光强无关，Maxwell 方程组为线性方程组，所以迭加原理成立。在非线性介质中，电极化强度是电场强度的非线性函数，Maxwell 方程组为非线性方程组，所以迭加原理不成立。

我们只考虑线性介质。

非线性光学材料有很多重要的应用，如光学倍频、分频、光孤子通讯、相位共轭元件等。

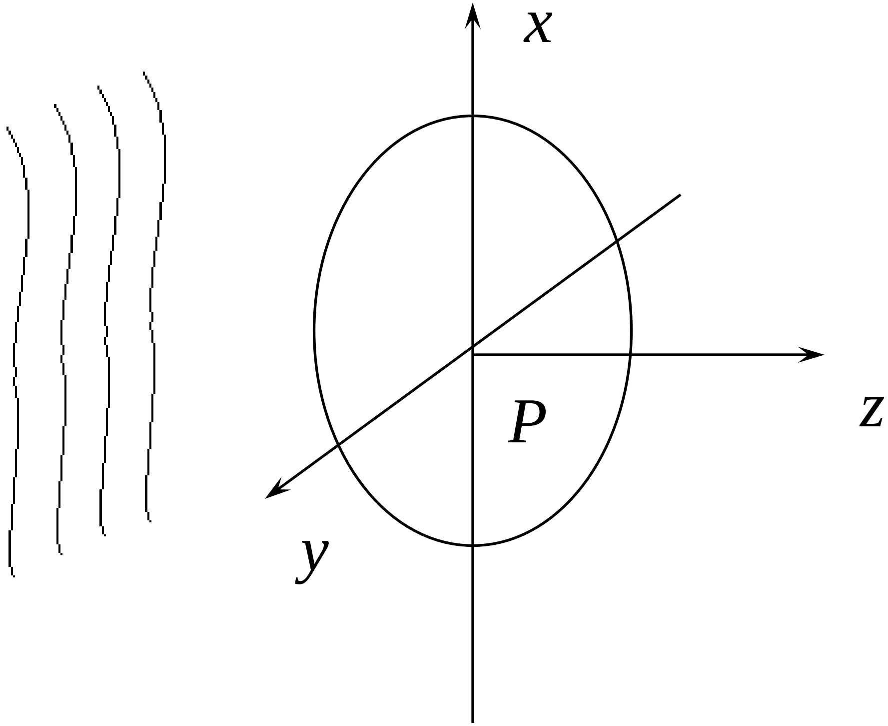
§ 2-2 波前函数

1. 波前的概念

波前原指位于最前面的波面。对于定态波可以狭义的将波前定义为任意一波面，也可以广义的定义为光场内的任意曲面。

波前函数：波前上的光场分布。

确定波前函数即可确定整个光场。记录了波前函数并使之再现，即可再现整个光场。通过改造波前函数，可以实现光学信息处理。



一旦波前函数确定，通过衍射理论，可得到空间任何一点的复振幅。

$\tilde{U}(x,y,z)$ 复振幅的空间分布

$\Downarrow$

$\tilde{U}(x,y)$ 波前函数

§2-3 平面波与球面波

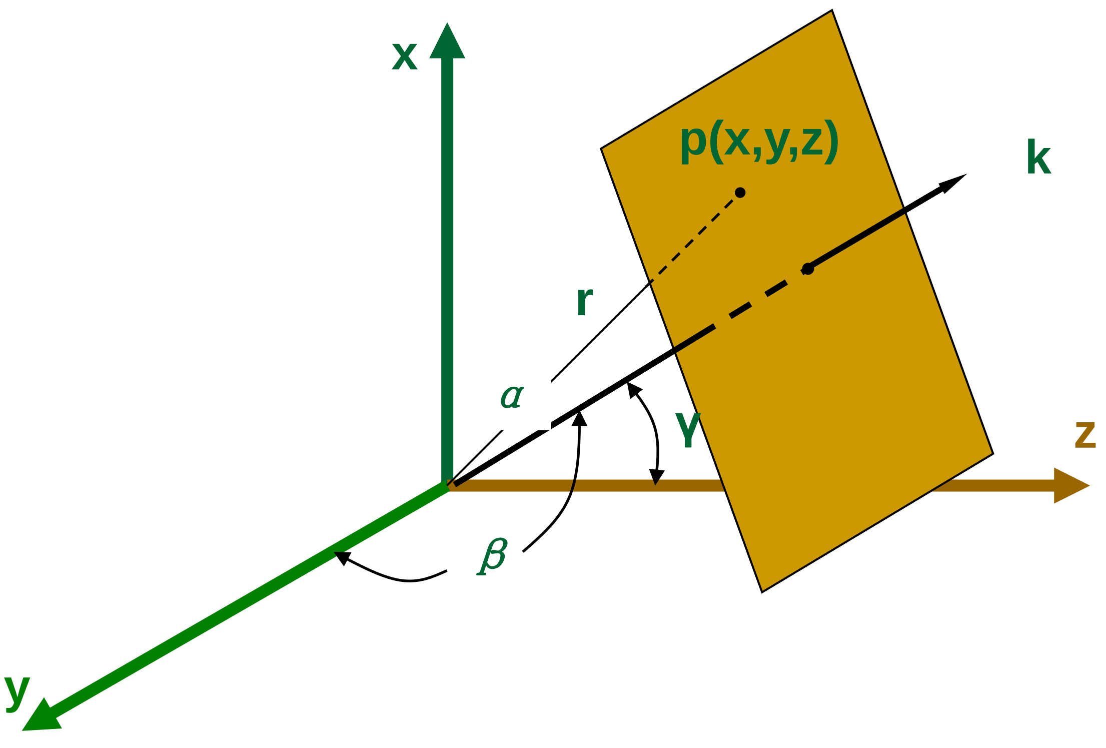
------单色平面波的复数表达式

单色平面波是指电场强度*E*和磁场强度*H*都以单一频率随时间作正弦变化（简谐振动）而传播的波。在任意方向上传播的平面电磁波的复数表达式为：

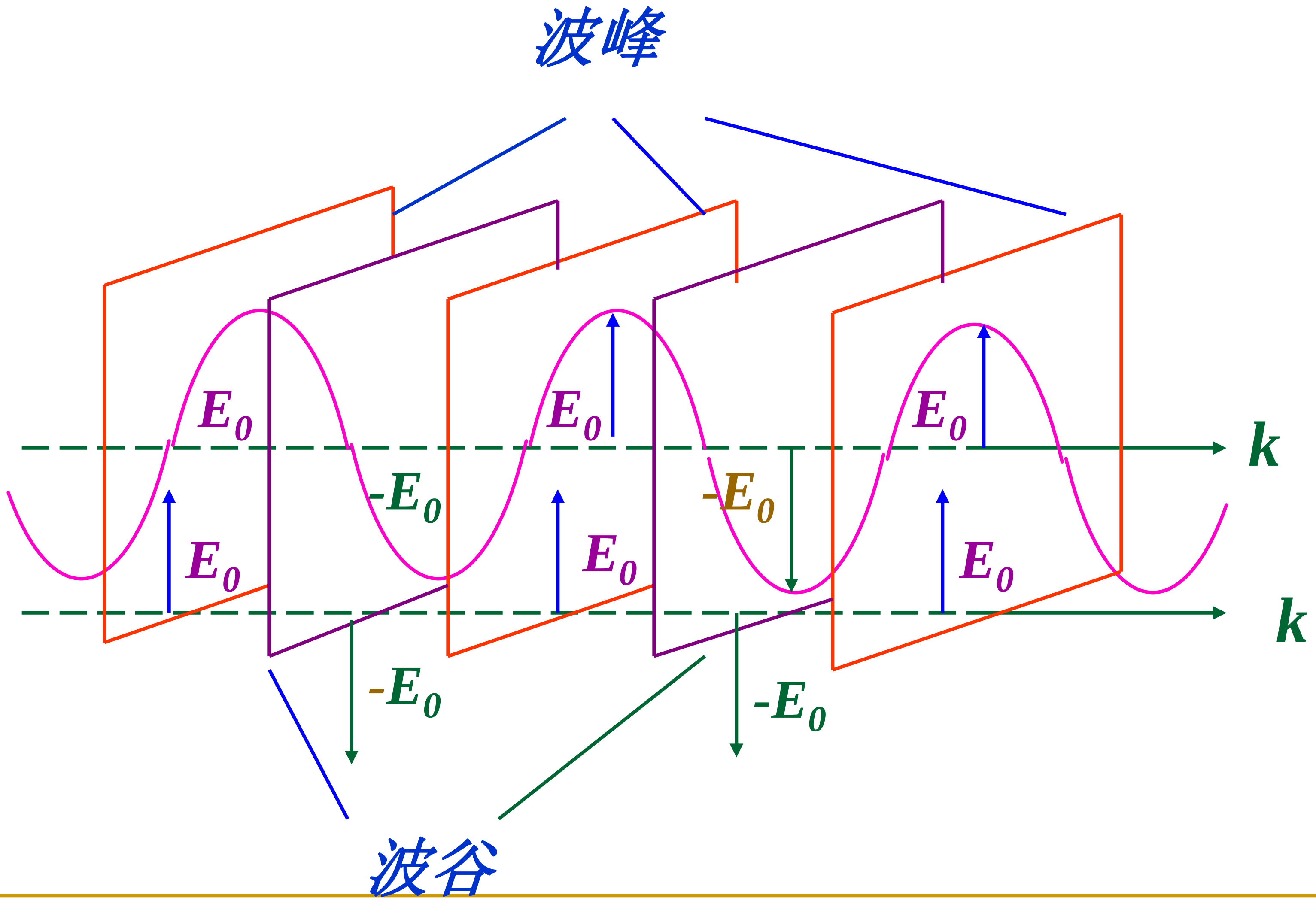
$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\exp\{i[\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t)+\varphi_0]\}$$

式中，Φ_0为初相位，*K* 为矢量(简称波矢)，*K* 的方向即表示波的传播方向，*k* 的大小，表示波在介质中的波数。上式中，指数前取正或负是无关紧要的，按我们的表示法，指数上的正相位代表相位超前，负相位代表相位落后。矢径*r* 表示空间各点的位置，如图所示。

沿空间任意方向传播的平面波



单色平面波



单色平面波的复数表达式

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\exp\{i[\vec{k}\bullet\vec{r}-\omega t)+\varphi_0]\}$$

时空分离

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\exp\left(i\vec{k}\bullet\vec{r}\right)\exp\left(i\omega t\right)$$

$$=\vec{E}\left(\vec{r}\right)\exp\left(i\omega t\right)$$

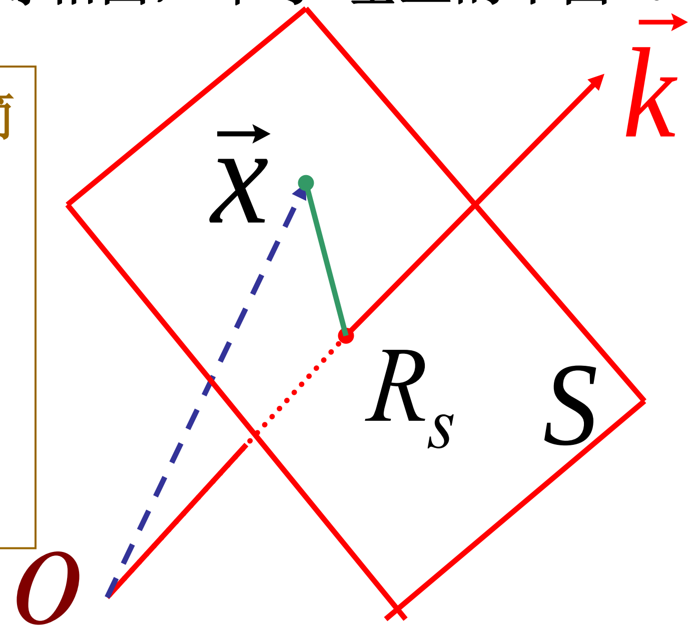
其中

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0\exp\left(i\vec{k}\bullet\vec{r}\right)$$

*平面电磁波主要性质

1）平面波：波前或等相面为平面，且波沿等相面法线即波矢方向传播。在同一时刻，相位$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$=常数$R_S$，满足此关系的$\boldsymbol{x}$构成等相面，即与$\boldsymbol{k}$垂直的平面S。

亥姆霍兹方程解出的E和B有各种形式，其中最简单、最基本的形式为平面波解。这里所说的平面波实质是平面单色波。研究平面波解的意义：①简单、直观、物理意义明显；②一般形式的波都可视为不同频率平面波的线性叠加。③远离辐射天线区域的电磁波都可看作平面波。



$$\vec{E}(\vec{x},t)=\underline{\vec{E}(\vec{x})}e^{-i\omega t}=\underline{\vec{E}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}e^{-i\omega t}=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t)=\underline{\vec{B}(\vec{x})}e^{-i\omega t}=\underline{\vec{B}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}e^{-i\omega t}=\vec{B}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

2) 平面波的特性

a. 波长与周期：波长——相位差为2π的两个等相面间的距离

$$k(R_s'-R_s)=k\lambda=2\pi\Rightarrow\lambda=2\pi/k$$

波长、波速、频率间的关系：

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}},\quad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda},\quad T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}$$

b. 横波特性(TEM波）：由单色波的麦克斯韦方程 ∇·E=0、∇·B=0

$$\nabla\cdot\vec{E}=\nabla\cdot(\vec{E}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}})=(\nabla\cdot\vec{E}_0)_{=0}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+(\underline{\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}})\cdot\vec{E}_0$$

$$=\underline{ie^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\vec{k}}\cdot\vec{E}_0=0\Rightarrow\vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\vec{B}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}})=(\nabla\cdot\vec{B}_0)_{=0}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+(\underline{\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}})\cdot\vec{B}_0$$

$$=\underline{ie^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\vec{k}}\cdot\vec{B}_0=0\Rightarrow\vec{k}\cdot\vec{B}=0$$

表示电场、磁场波动均是横波，***E***、***B***可在垂直于***k***的任意方向上振荡，称为横电磁波

$$\nabla\times(u\vec{a})=u\nabla\times\vec{a}+\nabla u\times\vec{a}$$

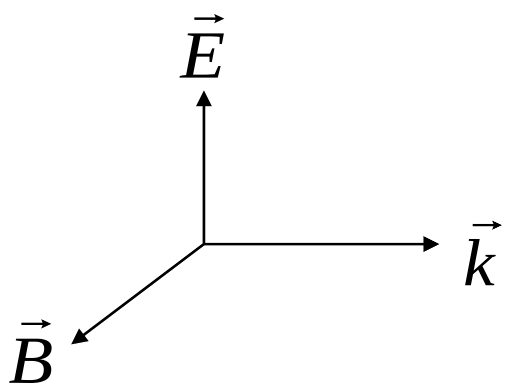
$$\nabla\cdot(u\vec{a})=u\nabla\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\nabla u$$

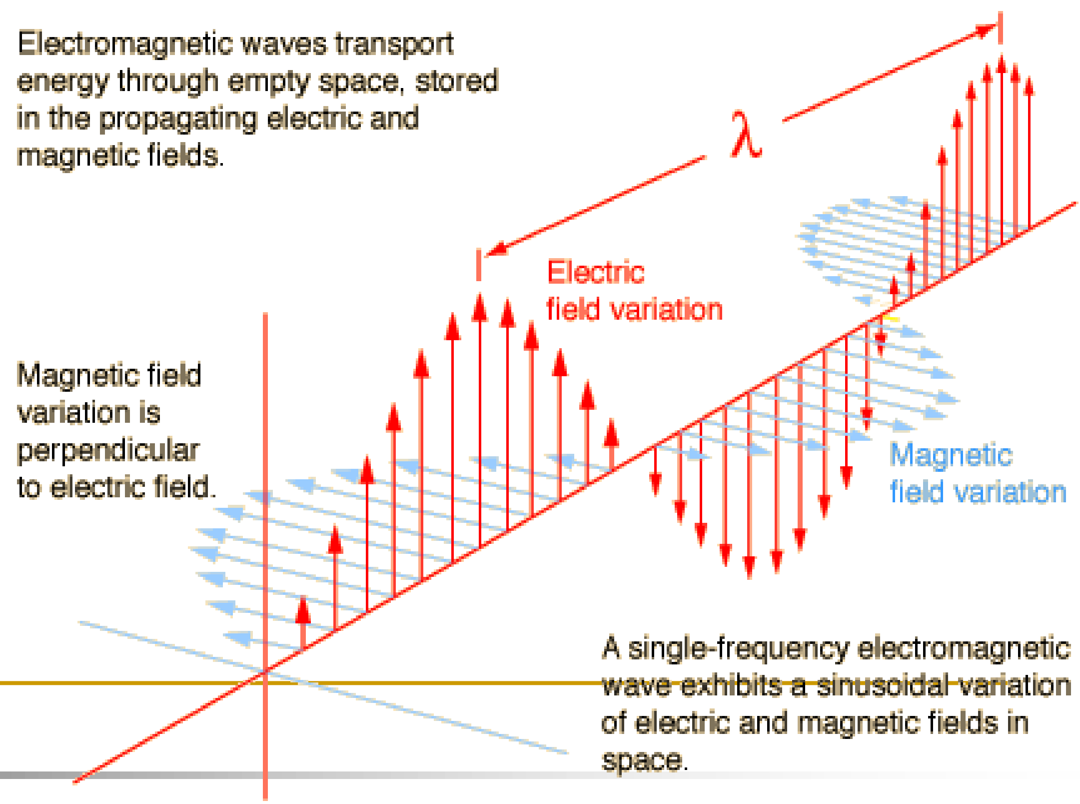
c.　B与E的关系

$$\vec{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right]=\frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}$$

$$|\vec{B}|=\frac{k}{\omega}\cdot|\vec{E}|=\frac{|\vec{E}|}{v}$$

B与E同相位；E、B、k构成右手螺旋关系；E/B为波速





概括平面电磁波的特性如下：

1. 电磁波为横波，$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$都与传播方向垂直；

2. $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$互相垂直，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$沿波矢$\boldsymbol{k}$方向；

3. $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$同相，振幅比为v.

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

式中ε_r和μ_r分别代表介质的相对电容率和相对磁导率，由于它们是频率ω的函数，因此在介质中不同频率的电磁波有不同的相速度，这就是介质的色散现象。

平面波的空间频率

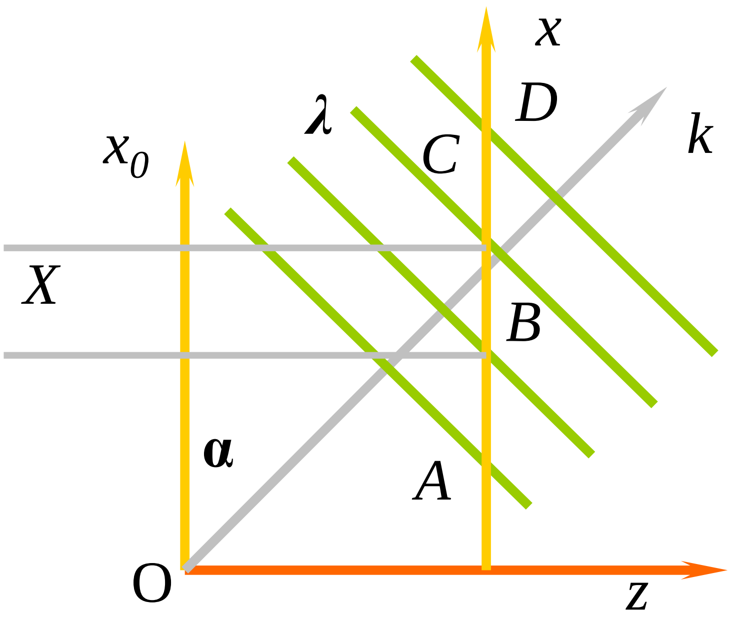
$$\lambda^2 f_x^{\ 2} + \lambda^2 f_y^{\ 2} + \lambda^2 f_z^{\ 2} = 1$$

定义：

$$X = \lambda / \cos\alpha$$

$$Y = \lambda / \cos\beta$$

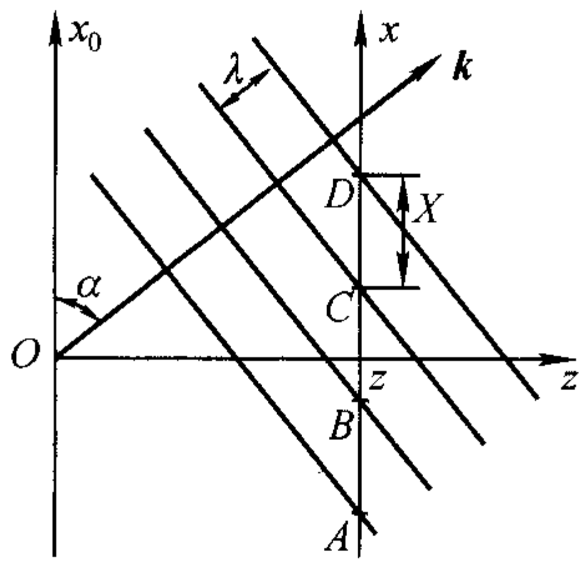
$$Z = \lambda / \cos\gamma$$

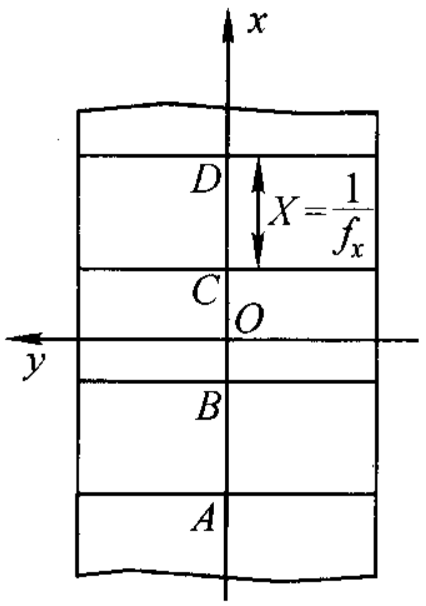


$$f_x = \cos\alpha / \lambda \quad f_y = \cos\beta / \lambda \quad f_z = \cos\gamma / \lambda$$

空间频率的物理意义

- 传播矢量 **k** 位于 x_0, z 平面的平面波在 x, y 平面上的空间频率。





空间频率的两种意义

- 时间倒数：频率；长度倒数：空间频率，即在单位长度内周期函数变化的周数（单位：周/mm，线对/mm，L/mm，等 ）
- 信息光学中有两种空间频率，一种是空间强度分布，单位为：周/mm，线对/mm，L/mm，等，对二维图象进行频谱分析得到的图象频谱对应的空间频率；
- 另一种是平面波对应的空间频率，因为电磁波在均匀介质中波长是常数，在其传播方向上空间频率是不变的。因而其对应在三维空间坐标上的每个方向的空间频率（单位为：光波数/mm ）表示出的意义实际上是电磁波的传播方向，或其传播方向与坐标轴的夹角，而且大小受到光波长的限制，最大是波长的倒数。

空间频率

分析

- "低频信号"—— 沿α,β角较大的方向传播的分量
- "高频信号"—— 沿α,β角较小的方向传播的分量
- "零频信号"—— 沿 z 轴方向传播的分量

$$\alpha = \beta = 90^0$$

平面电磁波在自由空间中的传播

设波矢量*k*表示光波的传播方向，其大小为：$k = 2\pi/\lambda$

方向余弦为：$\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma$

在任意时刻，与波矢量相垂直的平面上振幅和位相为常数的光波称为平面波。若空间某点*P*(*x*,*y*,*z*)的位置矢量*r*，则平面波传播到*P*点的位相为*k*· *r*,该点的复振幅一般表达式为：

$$U(x,y,z) = a\exp[jk\cdot r]$$

$$= a\exp[jk(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)]$$

平面电磁波在自由空间中的传播

由于 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

故 $$\cos\gamma=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

$$U(x,y,z)=a\exp\left[jkz\left(\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\right)\right]$$
$$\times\exp\left[jk(x\cos\alpha+y\cos\beta)\right]$$

物理含义

单色平面波复振幅的复数表达式

- 令初相位Φ_0＝0，上式可写为：

$$E = E_0 \exp\left(i \vec{k} \bullet \vec{r} \right)$$

$$\because k = k_x e_x + k_y e_y + k_z e_z = k(\cos\alpha e_x + \cos\beta e_y + \cos\gamma e_z)$$

$$\text{且}\ r = x e_x + y e_y + z e_z$$

$$E = E_0 \exp\left[i\left(k_x x + k_y y + k_z z \right) \right]$$

$$= E_0 \exp\left[ik\left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \right) \right]$$

传播方向与z方向一致时

$$\cos\alpha = 0$$

$$\cos\beta = 0$$

$$\cos\gamma = 1$$

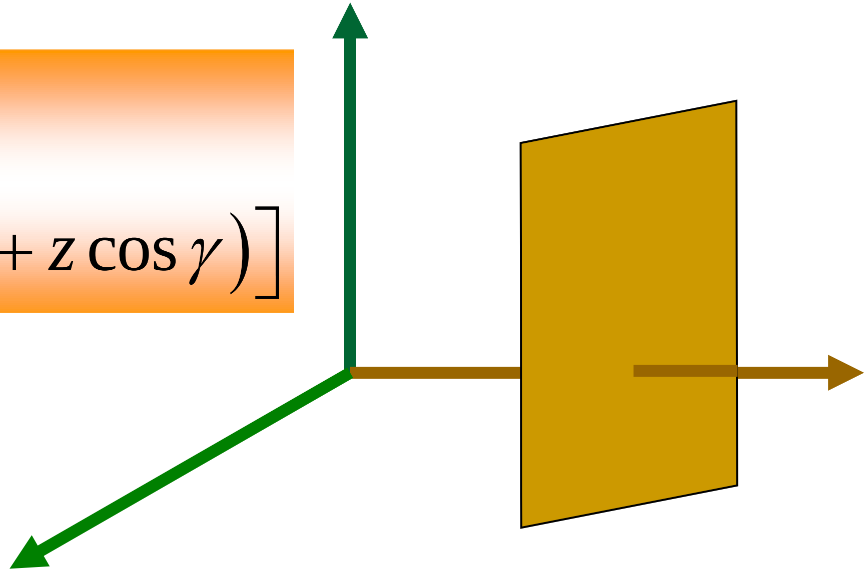
$$E = E_0 \exp\left(i \vec{k} \bullet \vec{z} \right)$$

单色平面波复振幅的复数表达式

$$E = E_0 \exp\left(i\vec{k} \bullet \vec{r} \right)$$

$$E = E_0 \exp\left[i\left(k_x x + k_y y + k_z z \right) \right]$$
$$= E_0 \exp\left[ik\left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \right) \right]$$

$$E = E_0 \exp\left(i\vec{k} \bullet \vec{z} \right)$$



平面电磁波场中能量的传播

- 1 能流密度——坡印廷(Poynting)矢量

- 2 平均能流密度——光强度

- 电磁场是一种物质，它具有能量。在一定区域内电磁场发生变化时，其能量也随着变化。能量按一定方式分布于场内，由于是运动着的，场能量也随着场的运动而在空间传播。描述电磁场能量的两个物理量：

  - 能量密度 w 表示场内单位体积的能量，是空间位置 x 和时间 t 的函数，$w=w(x,t)$；
  - 能流密度 S 描述能量在场内的传播，S 在数值上等于单位时间内垂直流过单位横截面的能量，其方向代表能量传播的方向。

平面电磁波场中能量的传播

光强是和电磁场的能流有关的物理量。电磁波的能量守恒表现为单位时间内流出（入）闭合体积的电磁波能量等于单位时间内闭合体积内的能量减少（增多）。

一、电磁波的能量密度*w*

表示场内单位体积的能量，是空间位置*x*和时间*t*的函数，***w*=*w* (x,*t*)**；

电场能量与磁场能量体密度分别为：

$$w_e = \frac{1}{2} D \cdot E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

$$w_m = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2$$

电磁场能量体密度为：

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$$

二、坡印廷矢量

S辐射强度（能流密度）单位时间内，通过垂直于波的传播方向的单位面积的辐射能。

它表示电磁场的能量的传播，即垂直通过单位面积的功率。其大小代表电磁波波强，这里指光强 (***intensity of light***)。其方向为光能量传播的方向。

$$\vec{B} = -\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$$

考虑到:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad \boxed{\sqrt{\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu}\,H}$$

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

$$S = w\upsilon = \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

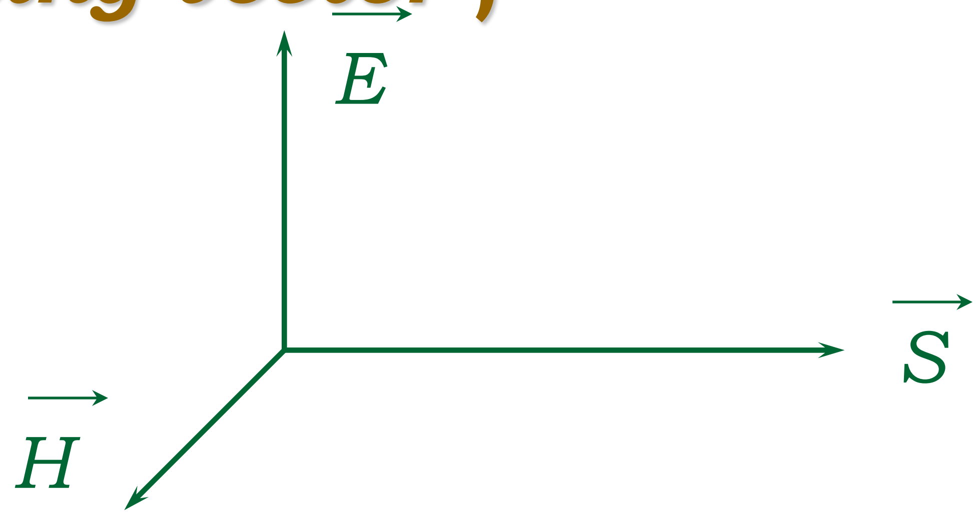
$$= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\sqrt{\varepsilon}\,E\boxed{\sqrt{\varepsilon}\,E} + \sqrt{\mu}\,H\boxed{\sqrt{\mu}\,H}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\sqrt{\varepsilon}\,E\boxed{\sqrt{\mu}\,H} + \sqrt{\mu}\,H\boxed{\sqrt{\varepsilon}\,E}\right)$$

$$= EH$$

坡印廷矢量 (*poynting vector*)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$



$$S = EH$$

$$\sqrt{\varepsilon}\, E = \sqrt{\mu}\, H$$

在各向同性介质中坡印廷矢量S的方向与光波矢量 ***k*** 的方向（相位传播方向）一致。但在各向异性介质中，二者的方向不同。

平面电磁波场中能量的传播

- 光波属高频电磁波，其频率为V≈10^{15}Hz数量级，即其振动的时间周期为T=10^{-15}s数量级。人眼的响应能力最小可达Δt≈10^{-1}s，感光胶片Δt≈10^{-8}s，而目前最好的光电探测器的时间响应能力也跟不上。
- 我们需要了解的是同一波场中不同空间位置的能流的强弱，则不必考虑瞬时能流值，而只需求能流对时间的平均值以突出其空间分布。
- 光强度：即接收器观测到光波在一个比振动周期大得多的观测时间内的平均能流密度。

坡印廷矢量的大小，即光在介质中传播的（瞬时光强）为

$$I = S = EH = wv$$
$$= v\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = v\mu_0\mu_r H^2$$

若用复指数形式表示：

$$S = v\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = v\varepsilon_0\varepsilon_r \left\{ \frac{1}{2}\left[E(r)\exp(-i\omega t) + E^*(r)\exp(i\omega t) \right] \right\}^2$$
$$= v\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{1}{4}\left[E^2 \exp(-2i\omega t) + E^{*2}(r)\exp(2i\omega t) + 2E \bullet E^* \right]$$

若对光强取平均值

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} v\varepsilon_0\varepsilon_r E \bullet E^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\mu_r}} E \bullet E^*$$

平面电磁波场中能量的传播

平均能流密度:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} v \varepsilon_0 \varepsilon_r E \bullet E^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E \bullet E^*$$

$$I \propto E_0^2$$

平面电磁波场中能量的传播

光强与光场的平方成正比,在同种介质中常简单地表述光强为

$$I = E \bullet E^{*} = E_{0}^{2}$$

单色球面波

- 平面波只是亥姆霍兹方程是一种最简单的解，对于二阶线性偏微分方程式，可以分别求出E 和 H 的多种形式的解。另一种最简单的解或最简单的波是球面波，即在以波源为中心的球面上有相同的场强，而且场强变化沿径向传播的波。这种波的场强分布只与离波源的距离r 和时间t 有关，而与传播方向无关。因此，当以标量波考虑时，亥姆霍兹方程的球面波解可以写为如下形式：

$$E=E(r)$$

单色球面波

简谐波是波动方程的解，有两类重要的基本解，即平面波和球面波。点光源发出的光波可认为是球面波。

球面波采用球面坐标系。把球心取作坐标系的原点，则 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的方向永远相同，$\boldsymbol{E}$的大小只与半径 $\boldsymbol{r}$及时间 $\boldsymbol{t}$ 有关，所以可写成 **$E = E$（r，t）**，把它代入

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

可得

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rE)$$

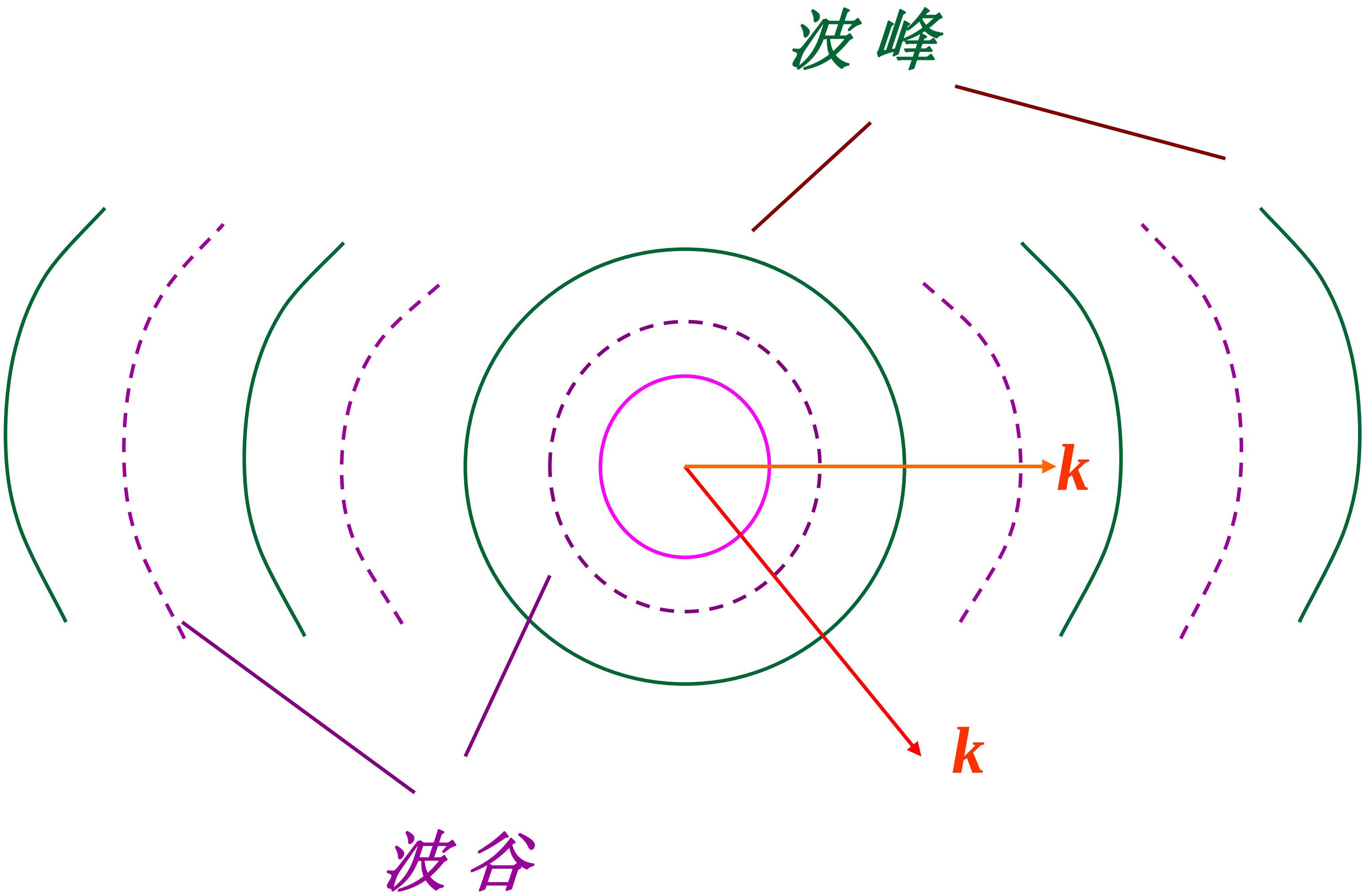
单色球面波

$$E(r,t)=\frac{E_0}{r}\exp[i(kr-\omega t)+\varphi_0]$$

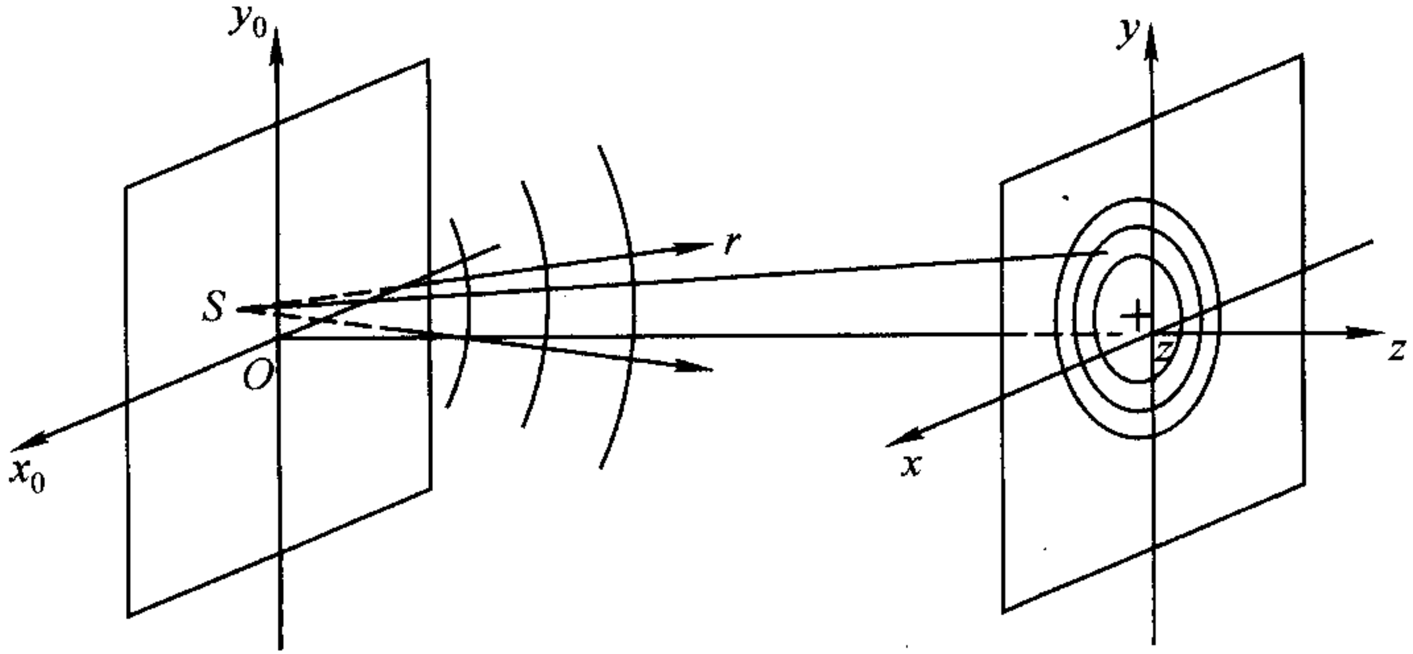
$$E(r,t)=\frac{E_0}{r}e^{-ikr}$$

- 式即为单色球面波的表达式，因为时间因子是可分离变量，且在讨论空间某一点的光振动时，时间因子总是相同的，所以常常略去不写。讨论中经常用的是单色球面波的复振幅表达式。
- 式中，E_0为一常数，表示在单位半径(r=1)的波面上的振幅。E_0/r表示球面波的振幅，它与传播*r* 成反比。从能量守恒原理不难理解这一结果。

单色球面波



球面波在自由空间中的传播



球面波在自由空间中的传播

$$r=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+z^2}$$

$$=z\left[1+\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]^{1/2}$$

球面波在自由空间中的传播

$$E(x,y,z)=\frac{A}{r}\exp[jkr]$$

$$=\frac{A\exp\left\{jkz\left[1+\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]^{1/2}\right\}}{z\left[1+\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]^{1/2}}$$

球面波在自由空间中的传播

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}$$

$$=z\left[1+\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]^{1/2}$$

条件

$z \succ\succ x-x_0, z \succ\succ y-y_0$

$$r\approx z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]$$

球面波在自由空间中的传播

$$E(x,y,z)=\frac{A}{r}\exp[jkr]$$

$$=\frac{A\exp\left\{jkz\left[1+\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]^{1/2}\right\}}{z\left[1+\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]^{1/2}}$$

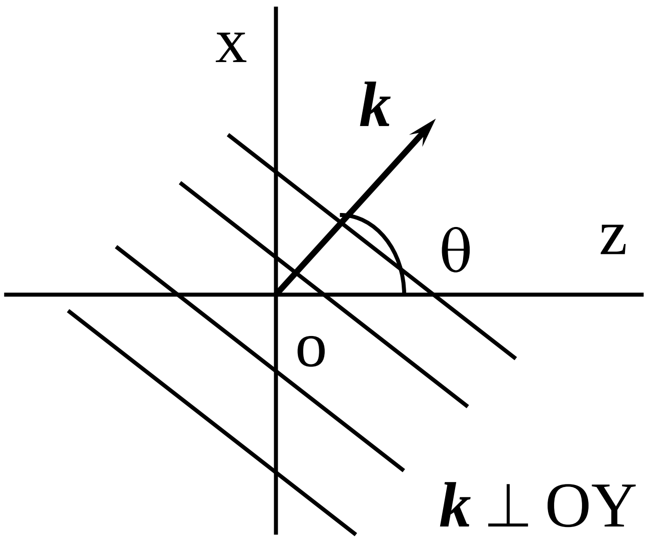
$$\Downarrow$$

$$E(x,y,z)=\frac{A\exp(jkz)}{z}\exp\left\{j\frac{k}{2z}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]\right\}$$

位相相同的点的轨迹，即等位相线方程为同心圆族 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=C$

例 题

例 1 试写出波前函数 $\tilde{U}_1(x,y)$



$\boldsymbol{k} \perp \mathrm{OY}$

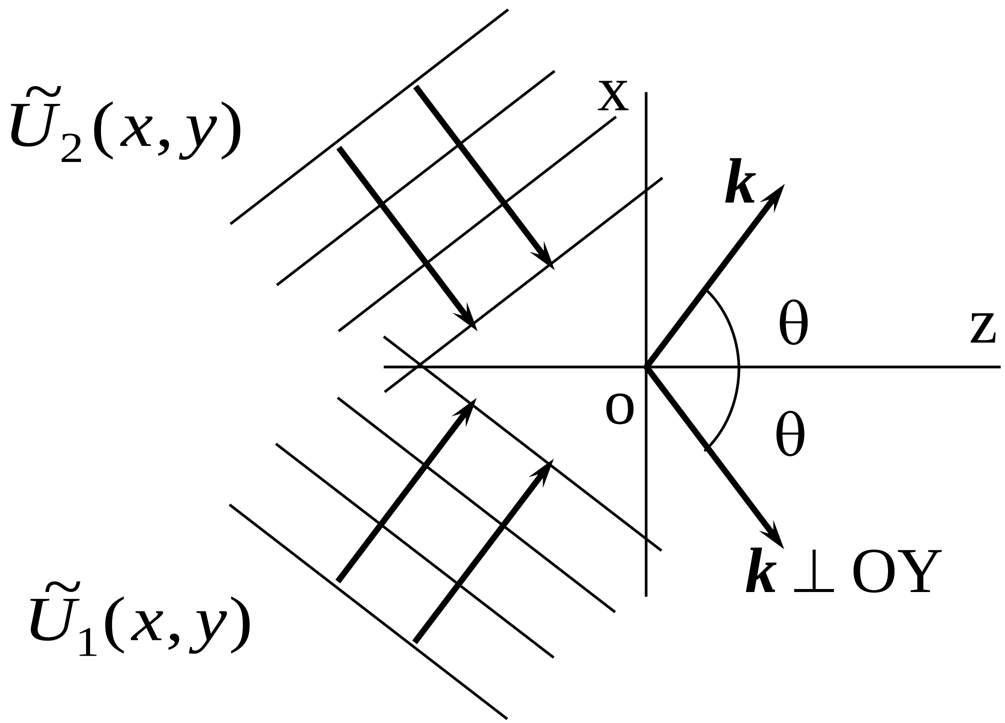
$$\tilde{U}(x,y,z) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$k_y=0$, OXY 面 $z=0$

$$\tilde{U}_1(x,y) = Ae^{ik_x x} = Ae^{ikx\sin\theta}$$

例 2 $\tilde{U}_1(x,y)$ 的共轭波是什么波？

$$\tilde{U}_2(x,y)=\tilde{U}_1^{\ *}(x,y)=Ae^{-ikx\sin\theta}=Ae^{ikx\sin(-\theta)}$$

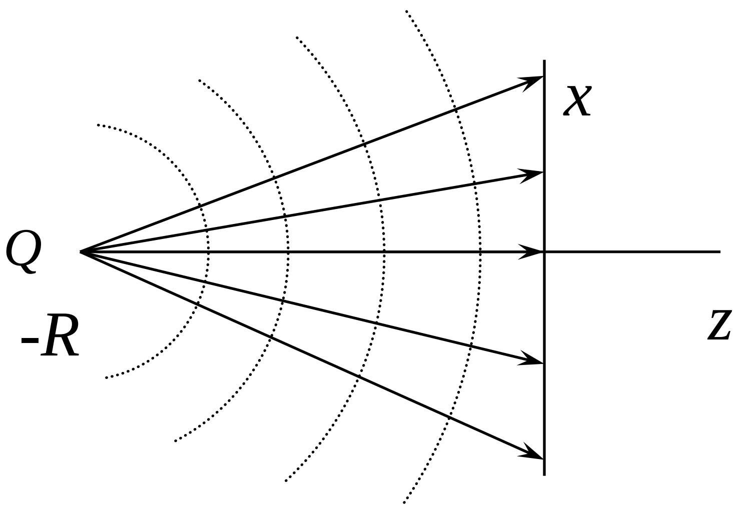


注意：光从左向右传播

例 3 试写出轴上点源 Q(0,0,-R) 发出的球面波的波前函数

$$\tilde{U}_3(x,y) = ?$$

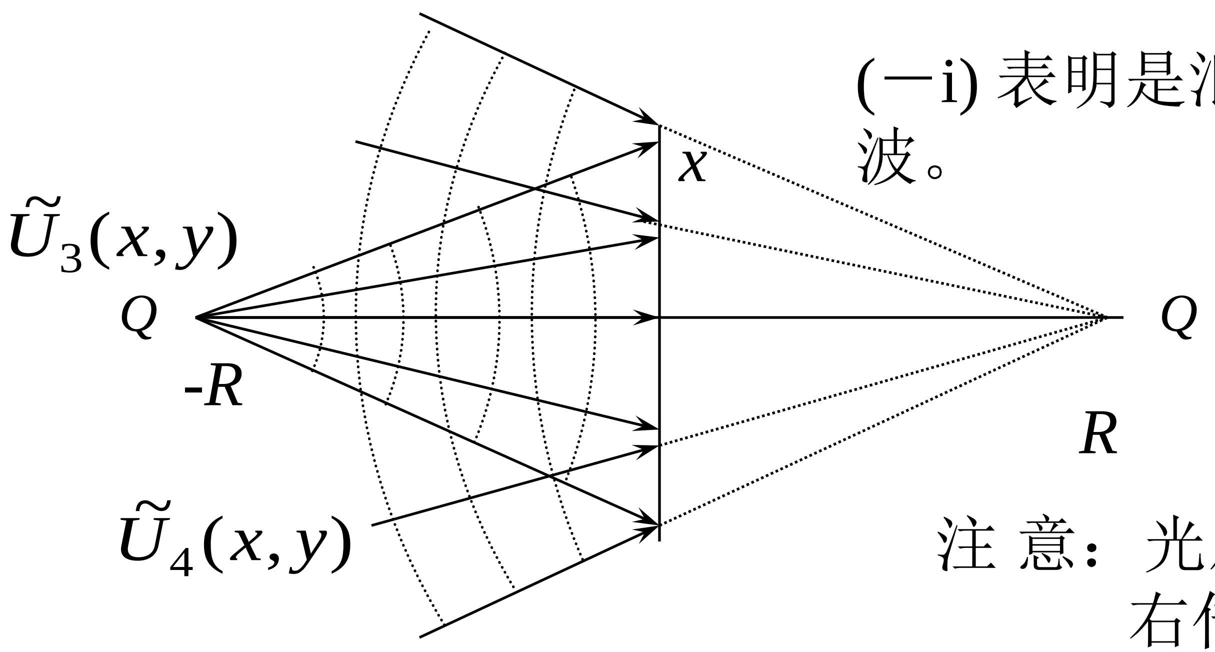
$$\begin{aligned}\tilde{U}_3(x,y) &= \left.\frac{a_1}{r}e^{ikr}\right|_{z=0} \\ &= \frac{a_1}{\sqrt{x^2+y^2+R^2}}\exp(ik\sqrt{x^2+y^2+R^2})\end{aligned}$$



(+i) 表明是发散球面波。

例 4 求 $\widetilde{U}_3(x,y)$ 的共轭波 $\widetilde{U}_4(x,y)=\widetilde{U}_3{}^*(x,y)$

$$\widetilde{U}_4(x,y)=\frac{a_1}{\sqrt{x^2+y^2+R^2}}\exp(-ik\sqrt{x^2+y^2+R^2})$$



(一i) 表明是汇聚球面波。

注 意：光从左向右传播

3. 球面波向平面波过渡

在一定条件下可以用平面近似描述球面，用平面波近似描述球面波。

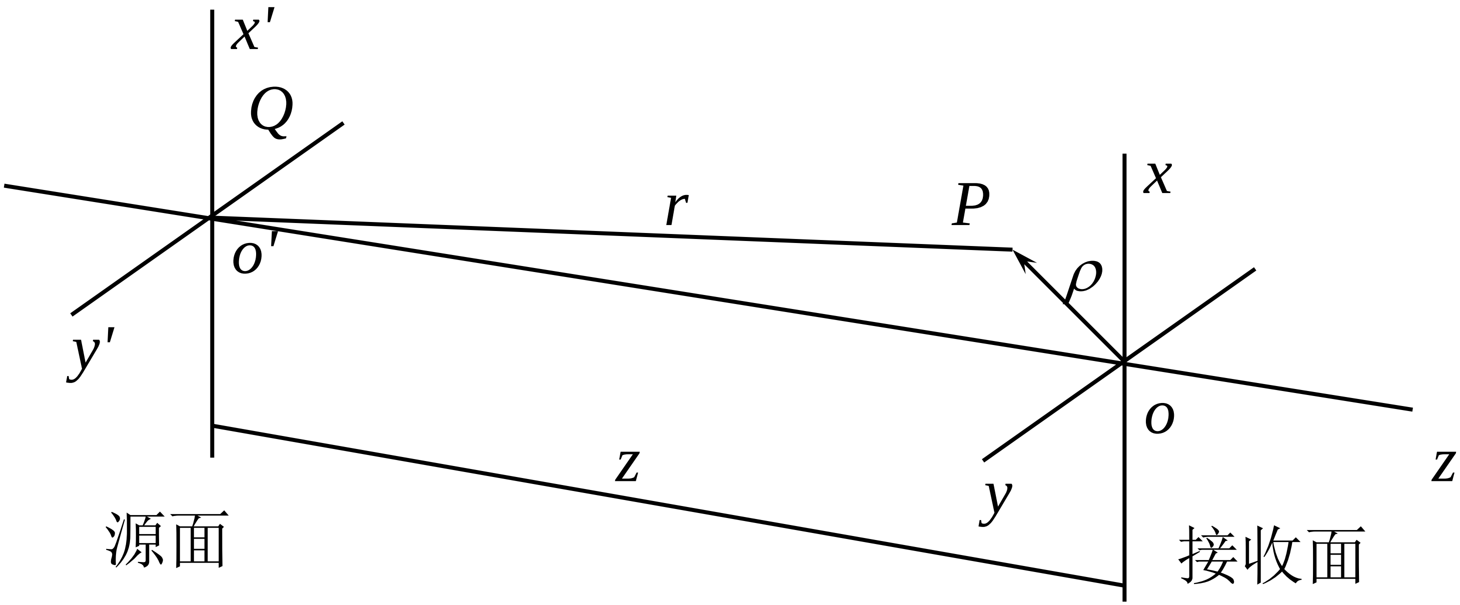
首先考虑轴上点光源发出的球面波。设波长为 λ。

$$\tilde{U}(x,y) = \frac{a_1}{r} e^{ikr}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

轴上点源



设 $z^2 > \rho^2$，则

$$r(x,y) = z + \frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{(x^2+y^2)^2}{8z^3} + \cdots\cdots$$

考虑傍轴条件 $z^2 >> \rho^2$ ，此时

$$\frac{a_1}{r} \approx \frac{a_1}{z}$$

即振幅的变化可以忽略——平面波的特征。

傍轴条件是球面波向平面波过渡的振幅条件。

此时：

$$\tilde{U}(x,y) = \frac{a_1}{r} e^{ikr} \approx \frac{a_1}{z} e^{ikz} \exp(i\frac{\pi\rho^2}{z\lambda})$$

再考虑远场条件 $z\lambda >> \rho^2$ ，此时

$$\exp(i\frac{\pi\rho^2}{z\lambda}) \approx 1, \quad e^{ikr} \approx e^{ikz}\exp(i\frac{\pi\rho^2}{z\lambda}) \approx e^{ikz}$$

即相位随 (x,y) 的变化可以忽略 —— 平面波的特征。

远场条件是球面波向平面波过渡的相位条件。此时：

$$\tilde{U}(x,y) = \frac{a_1}{r}e^{ikr} \approx \frac{a_1}{r}e^{ikz}$$

如傍轴条件和远场条件同时满足，则球面波可用正入射平面波取代：

$$\tilde{U}(x,y) = \frac{a_1}{r}e^{ikr} \approx \frac{a_1}{z}e^{ikz}$$

远场条件与傍轴条件的比较

光波：

$$\lambda = 0.5\mu m, \rho \sim 1mm, ">>" \Leftrightarrow 50:1$$

$$z^2 >> \rho^2 \Leftrightarrow z^2 > 50\rho^2 \Rightarrow z > 1cm$$

$$z\lambda >> \rho^2 \Leftrightarrow z > 50\frac{\rho^2}{\lambda} \Rightarrow z > 100m$$

所以远场条件包含傍轴条件 。

声波：

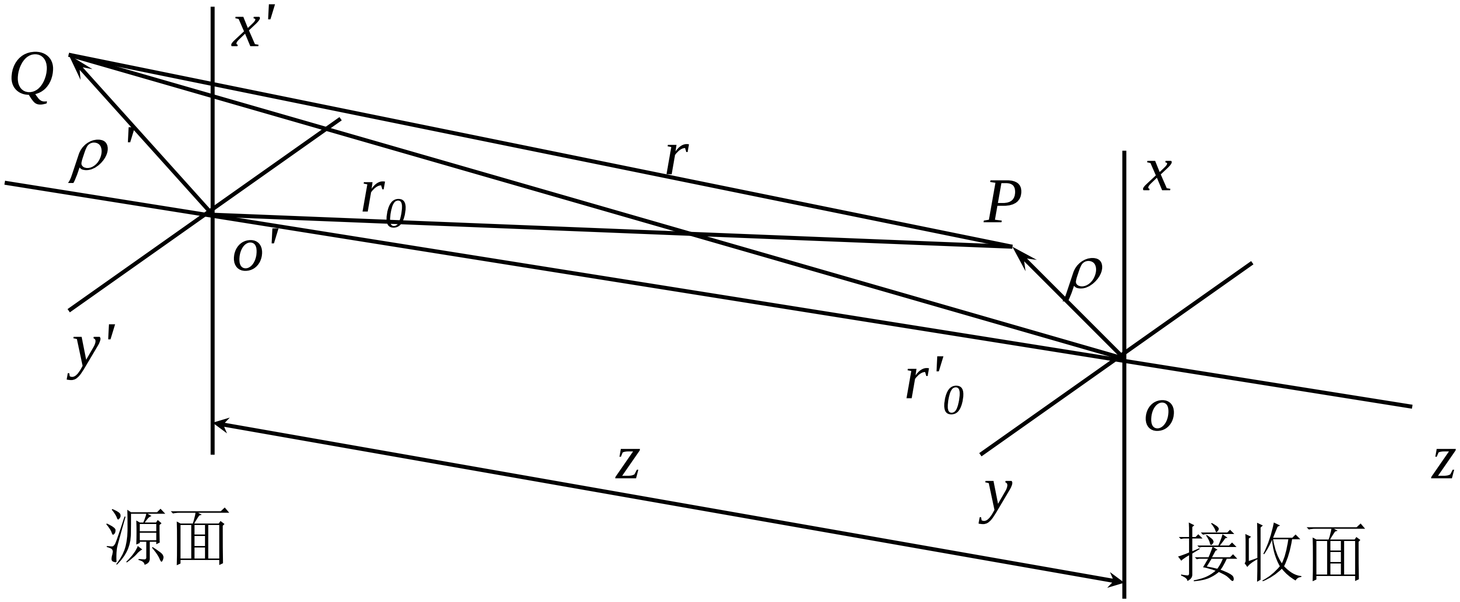
$$\lambda = 1m, \rho \sim 10cm, ">>" \Leftrightarrow 50:1$$

$$z^2 >> \rho^2 \Leftrightarrow z^2 > 50\rho^2 \Rightarrow z > 70cm$$

$$z\lambda >> \rho^2 \Leftrightarrow z > 50\frac{\rho^2}{\lambda} \Rightarrow z > 50cm$$

所以傍轴条件包含远场条件 。

考虑轴外点光源 Q 发出的球面波。



i) 设源点 Q 和场点 P 均满足傍轴条件。于是

$$r=\sqrt{z^2+(x-x')^2+(y-y')^2}$$

$$\approx z+\frac{x^2+y^2}{2z}+\frac{x'^2+y'^2}{2z}-\frac{xx'+yy'}{z}$$

$$\tilde{U}(x,y)=\frac{a_1}{r}e^{ikr}$$

$$\approx\frac{a_1}{z}e^{ikz}\exp\left(ik(\frac{\rho^2}{2z}+\frac{\rho'^2}{2z}-\frac{\rho\cdot\rho'}{z})\right)$$

ii) 设源点 Q 还满足远场条件。于是

$$\tilde{U}(x,y) \approx \frac{a_1}{z} e^{ikz} \exp\left(ik\left(\frac{\rho^2}{2z} + \frac{\rho'^2}{2z} - \frac{\rho \cdot \rho'}{z}\right)\right)$$

$$\approx \frac{a_1}{z} e^{ikr_0} \exp\left(-ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right)$$

相位是 (x', y') 的线性函数。

iii) 设场点 P 还满足远场条件。于是

$$\tilde{U}(x,y) \approx \frac{a_1}{z} e^{ikz} \exp\left(ik(\frac{\rho^2}{2z} + \frac{\rho'^2}{2z} - \frac{\rho \cdot \rho'}{z}) \right)$$

$$\approx \frac{a_1}{z} \exp(ikr_0') \exp\left(-ik(\frac{xx'+yy'}{z}) \right)$$

球面波化为斜入射平面波。

完

谢谢大家！